SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Ermanno Lanconelli

SUL PROBLEMA DI DIRICHLET PER ALCUNE CLASSI DI OPERATORI LINEARI DEL SECONDO ORDINE CON PARTE PRINCIPALE SEMIDEFINITA POSITIVA

9 aprile 1992

1.Introduzione. In questo seminario intendo mostrare come sia possibile studiare problemi al contorno per alcune classi di equazioni ellittico-paraboliche lineari del secondo ordine, con parte principale fortemente singolare, utilizzando alcune classiche idee sistematicamente sviluppate da G. Cimmino nei suoi notevoli lavori sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche di ordine 2 [C].

Il metodo di Cimmino, successivamente ripreso ed utilizzato da B. Pini nel caso parabolico [P], si basa sullo studio di alcune *proprieta' di media* caratteristiche delle soluzioni dell' equazione $Lu = f$, proprieta' che costituiscono una delle innumerevoli estensioni del classico teorema di Gauss-Koebe per le funzioni armoniche. Tali formule di media non richiedono la conoscenza della soluzione fondamentale, ma soltanto di una *funzione di Levi* che, nel caso ellittico, é data dalla soluzione fondamentale di una equazione a coefficienti costanti. Piu' precisamente, se ad esempio

$$L = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}\left(a_{ij}\partial_{x_j}\right)$$

e' un operatore ellittico, la funzione di Levi con polo in x :

$$y \mapsto G(x,y)$$

e' la soluzione fondamentale dell'operatore (a coefficienti costanti)

$$L_x = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{y_i y_j} \tag{1.1}$$

Nelle formule di media scritte da Cimmino sugli *insiemi di livello* di *G*, compaiono nuclei singolari del tipo(newtoniano)

$$|x-y|^{-N+\alpha}, \quad \alpha \geq 0$$

L'odierno sviluppo della teoria degli integrali singolari negli spazi L^p unitamente a quella, piu' classica, negli spazi di funzioni hölderiane, consentirebbe oggi una trattazione molto semplice del problema di Dirichlet per le equazioni ellittiche con i metodi di Cimmino, metodi un poco dimenticati a causa del notevole successo conseguito dall'applicazione dell'analisi funzionale e della teoria degli spazi di Sobolev alle equazioni alle derivate parziali. Volendo pero' trattare operatori non classificabili come ellittici, ne' come parabolici, ma pur sempre con parte principale semidefinita positiva e che si presentano in alcune applicazioni quali ad esempio l'*equazione di Fokker-Plank*

(1.2) $$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \partial_{x_i}\left(a_{ij}\partial_{x_j}u\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i x_i \partial_{x_i} u - \partial_t u = 0, \quad 1 \le p < N,$$

gli spazi di Sobolev, e le loro piu' note generalizzazioni, non sembrano piu' costituire un ambito funzionale molto naturale.

In questo seminario mi propongo di mostrare che i metodi di Cimmino si possono invece agevolmente utilizzare nello studio di equazioni quali la (1.2) poiche' per queste, in alcuni casi, risulta relativamente facile determinare delle funzioni di Levi e pervenire cosi' a formule di media che caratterizzano *le soluzioni deboli* di $Lu = 0$. Lo studio di queste formule si puo' condurre senza troppa difficolta' utilizzando recenti risultati sulla continuita' hölderiana ed L^p delle trasformazioni integrali con nuclei omogenei rispetto ai naturali gruppi di dilatazioni associati agli operatori L.

Noi ci limiteremo qui a considerare il caso hölderiano che consente una trattazione piu' elementare.

2. Operatori con parte principale a coefficienti costanti. In questo paragrafo richiamero' alcuni risultati recentemente ottenuti in collaborazione con S. Polidoro [L P].

Siano $A = \left(a_{ij}\right)$ e $B = \left(b_{ij}\right)$ matrici $N \times N$ a termini reali. Supponiamo che esista $p \le N-1$ tale che

$$a_{ij} = 0 \quad se \quad i \ge p+1 \; opp \; j \ge p+1\,; \quad \left(a_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) > 0 \; in \; R^p$$

Consideriamo l'operatore

(2.1) $$L = div(AD) + \langle x, BD\rangle - \partial_t$$

ove $x = \left(x_1, \ldots, x_N\right)$ indica il punto di R^N e $D = \left(\partial_{x_1}, \ldots\ldots, \partial_{x_N}\right)$ indica l'operatore gradiente in R^N .Indicheremo poi con $z = (x,t)$ il punto di R^{N+1} .

Se

(H.1) $$rango\, \mathfrak{L}\ (X_1, \ldots\ldots\ldots, X_p, Y) = N+1$$

in ogni punto di R^{N+1} , ove con X_j ed Y abbiamo indicato rispettivamente

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji}\partial_{x_i}, \quad \langle x, BD\rangle + \partial_t \,,$$

esiste in R^{N+1} una struttura di gruppo (R^{N+1}, $\circ$) rispetto alla quale L e' invariante per traslazioni a sinistra. Inoltre L ha una soluzione fondamentale $G(\zeta,z)$ di classe C^∞ per $\zeta \neq z$ che si puo' scrivre esplicitalente nella forma

$$G(\zeta,z)=\Gamma(z^{-1}\circ\zeta)$$

ove

$$\Gamma(z)=\Gamma(x,t)=\frac{(4\pi)^{-N/2}e^{-t\,\mathrm{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}}\exp\left(-\frac{\langle C^{-1}(t)x,x\rangle}{4}\right)\quad per\ t>0,$$

$$\Gamma(z)=\Gamma(x,t)=0\quad per\quad t\leq 0,$$

$C(t)$ e' la matrice(*definita positiva per* $t>0$ *se e solo se vale* (H.1))

$$\int_0^t {}^T E(s)AE(s)ds,\quad E(s)=\exp(sB)$$

e $D(t)=\det C(t)$.

In alcuni casi esiste in R^{N+1} un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ definite da

$$D(\lambda)(x_1,\ldots\ldots,x_N,t)=(\lambda^{\alpha_1}x,\ldots\ldots,\lambda^{\alpha_N}x,\lambda^2)$$

con $\alpha_1=\cdots\cdots=\alpha_p=1\quad e\quad \alpha_k\geq 3\quad per\quad k\geq 1$, tali che

$$L\circ D(\lambda)=\lambda^2 D(\lambda)\circ L$$

Chiamiamo dimensione omogenea di R^{N+1} rispetto al gruppo $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ il numero reale

$$Q=\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_N+2$$

Si riconosce facilmente che, in questo caso, la soluzione fondamentale G e' una funzione omogenea di grado

$$-\ Q\ +\ 2$$

rispetto alle dilatazioni del gruppo $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Indicheremo d'ora in poi con $\Re_0$ la classe degli operatori invarianti rispetto a qualche gruppo di dilatazioni.

In [LP] e' provato che ogni operatore del tipo (2.1) verificante (H.1) *ha una soluzione fondamentale "equivalente " a quella di in un operatore delle classe* $\Re_0$.

Osserviamo infine, esplicitamente, che nella classe $\Re_0$ sono contenuti operatori con parte principale fortemente degenere, quale, ad esempio, il seguente

$$L=\partial_{x_1}^2+x_1\,\partial_{x_2}+x_2\,\partial_{x_3}+\cdots\cdots+x_{N-1}\,\partial_{x_N}-\partial_t$$

3. **Operatori con parte principale a coefficienti variabili.** In questo paragrafo considereremo operatori del tipo seguente

$$L = div(AD) + \langle x, BD\rangle - \partial_t \tag{3.1}$$

ove $A = (a_{ij})_{ij=1,\dots,p}$ e' una matrice *pxp* a coefficienti hölderiani con derivate seconde hölderiane. Supporremo A >0 in R^p, $1 \le p < N$ .Inoltre B e' una matrice costante NxN e

$$\text{(H2)} \quad \begin{cases} \text{per ogni fissato } \zeta \in R^{N+1} \text{ l' operatore a coefficienti "costanti"} \\ L_\zeta = \text{div}(A(\zeta)D) + \langle x\, , BD\rangle - \partial_t \text{ appartiene alla classe } \Re_0 \end{cases}$$

Se $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ e' il gruppo di dilatazioni relativo a L (*lo stesso per ogni* ζ), indichiamo con $|\ |$ la norma $D(\lambda)$-omogenea cosi' definita

$$|z| = |(x,t)| = \sum_{j=1}^{N} |x_j|^{1/\alpha_j} + |t|^{1/2}$$

Sia poi Q+2 la dimensione omogenea di R^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Sia ora G la soluzione fondamentale di L^*_ζ con polo in *0*. Prendendo spunto dal procedimento utilizzato da Pini in [P] - (b) , poniamo, per ogni fissato r >0,

$$H_r(\zeta) = G(\zeta, z)\ \omega\left(\frac{|z^{-1} \circ \zeta|}{r}\right)$$

ove " $\circ$" indica l'operazione di gruppo relativa ad L_ζ e ω e' una funzione C^∞ tale che $\omega(\rho) = 1 \quad per \quad \rho \le \frac{1}{2}, \quad \omega(\rho) = 0 \quad per \quad \rho \ge 1$ .Siano poi

$$D_r(\zeta) = \{z \,/\, |z^{-1} \circ \zeta| \le r\}$$

e,per ogni ε>0 sufficientemente piccolo

$$D_{r,\varepsilon}(\zeta) = D_r(\zeta) \bigcap \{t \le \tau - \varepsilon\}.$$

Se $u \in C^{(2)}(\Omega)$, Ω aperto di R^{N+1} e $D_r(\zeta) \subset\subset \Omega$, la formula di Green per L, tenuto conto del fatto che H_r e le sue derivate sono nulle sul bordo $D_r(\zeta)$,fornisce

$$\int_{D_{r,\varepsilon}} (H_r\ Lu - u\ L^* u)dz = - \int_{D_{r,\varepsilon}(\zeta) \bigcap \{t = \tau - \varepsilon\}} uH_r\ dx \tag{3.2}$$

Da questa, per $\varepsilon \to 0$, si ottiene

(3.3)
$$u(\zeta) = \int_{D_r(\zeta)} (uL^* H_r - H_r Lu) dz$$

Osserviamo esplicitamente che $L^* H_r$ e' localmente sommabile in quanto

$$L^* G = \left(L - L^*_\zeta\right) G = O\left(\left(a_{ij}(z) - a_{ij}(\zeta)\right) D_{ij} G(\zeta, z) \right)$$
$$= O\left(\left|z^{-1} \circ \zeta\right|^{-Q+\alpha} \right)$$

per qualche $\alpha > 0$ (con i,j=1...p).

Imitando alcune tecniche della teoria hölderiana degli integrali singolari, si puo' ora provare il seguente Teorema, che avra' un ruolo fondamentale nel seguito.

Teorema 3.1. Se $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ verifica

(3.4)
$$u(\zeta) = \int_{D_r(\zeta)} \left(u\, L^* H_r - f\, H_r\right) dz$$

per ogni $\zeta \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $D_r(\Omega) \subset\subset \Omega$, essendo f una funzione localmente hölderiana in Ω, allora u e' uguale q.d. ad una funzione localmente hölderiana.Se f e' sufficientemente regolare, allora $u \in C^2(\Omega)$.

Da questa teorema segue immediatamente il seguente

Corollario 3.1. Nelle ipotesi del teorema precedente e se $f = 0$, la funzione u puo' essere modificata su di un insieme di misura nulla in modo da risultare soluzione classica dell'equazione $Lu = 0$ *in* Ω

Dimostrazione del Corollario. Per il Teorema 3.1 la funzione u e' di classe C^2 (dopo averla modificata su di un insieme di misura nulla). Essa verifica quindi (3.3) e (3.4). Sottraendo (3.4) a (3.3) si ottiene

$$0 = \int_{D_r(\zeta)} (f - Lu) H_r dz = \int_{D_r(\zeta)} (-Lu) H_r dz$$

per ogni $\zeta \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tali che $D_r(\Omega) \subset\subset \Omega$. Questo implica $Lu = 0$ *in* Ω.

Da questo Corollario, seguendo un ragionamento di Cimmino ([C]- (b) , pagg. 197-198: cfr. anche Miranda [M], pagg. 116-117) si ottiene il seguente *teorema di regolarizzazione* delle soluzioni deboli di $Lu = 0$ *in* Ω.

Teorema 3.2. Sia $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ e sia f una funzione localmente hölderiana in Ω. Supponiamo

$$\int_\Omega u\, L^* \phi\; dz = \int_\Omega f\; \phi\; dz \qquad \forall \phi \in C^\infty_o(\Omega) \tag{3.5}$$

Allora u verifica la formula di media (3.4). Di conseguenza, se $f=0$, u puo' essere modificata su di un insieme di misura nulla si' da risultare di classe C^2 in Ω. Inoltre

$$Lu = 0 \quad in \quad \Omega.$$

Dimostrazione. Fissati $\zeta \in \Omega$ e $r > O$ tali che $D_r(\zeta) \subset\subset \Omega$ poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

$$\phi_\varepsilon(z) = \psi_\varepsilon\left(\frac{1}{G(\zeta, z)}\right) \omega\left(\frac{|z^{-1} \circ \zeta|}{r}\right) \chi\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)$$

essendo χ una funzione C^∞ su $\boldsymbol{R}$, nulla per $\rho \geq -\frac{1}{2}$ e $\equiv 1$ per $\rho \leq -1$.
Inoltre $\psi = 1$ su $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, $\psi(\rho) = \frac{1}{\rho}$ per $\rho \geq 1$, $\psi \in C^\infty$.
Sostituendo in (3.5) si ottiene

$$\int_\Omega (u(z) - u(\zeta))\, L^* \phi_\varepsilon(z)\; dz = \int_\Omega f\; \phi_\varepsilon\, dz \tag{3.6}$$

in quanto $\int_\Omega L^* \phi_\varepsilon dz = 0$. Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ in (3.6), si ottiene

$$\int_{D_r(\zeta)} (u(z) - u(\zeta)) L^* H_r\, dz = \int_{D_r(\zeta)} f\, H_r\, dz \tag{3.7}$$

D'altra parte, per la (3.3) con $u = 1$,

$$1 = \int_{D_r(\zeta)} L^*\, H_r\, dz.$$

Utilizzando questa in (3.7), si ottiene l'asserto.

4. Problema di Dirichlet per l'equazione omogenea. Sia L un operatore verificante le ipotesi assunte nel n. 3 . Sia Ω un aperto limitato di R^{N+1} e sia $\phi \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$

Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo il problema di Dirichlet

$$(4.1) \qquad \begin{cases} (L+\varepsilon\Delta)u = 0 & in \quad \Omega \\ u-\phi \in H_o^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

essendo Δ l'operatore di Laplace in R^{N+1} e $H_o^{1,2}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev delle funzioni $u \in L^2(\Omega)$ con $D_z u \in L^2(\Omega)$, "nulle" al bordo. E' ben noto che il problema (4.1) ha una sola soluzione debole $u_\varepsilon = \phi + v_\varepsilon$, con $v_\varepsilon \in H_o^{1,2}(\Omega)$.

Inoltre, per il principio di massimo debole ([GT], pag. 168)

$$(4.2) \qquad \sup_\Omega \mathrm{ess}\ |u_\varepsilon| \le \sup_{\partial\Omega} |\phi|$$

Alora $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>o}$ e' limitata in $L^2(\Omega)$. Esiste quindi $\varepsilon_j \downarrow 0$ tale che

$$u_{\varepsilon_j} \to 0 \quad \text{debolmente in } L^2(\Omega)$$

Per ogni $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ si ha quindi

$$\int_\Omega u L^* \varphi\, dz = \lim_{\varepsilon\to o} \int_\Omega u_{\varepsilon_j} (L^* + \varepsilon_j \Delta)\varphi\, dz = 0$$

Per il teorema (3.2) u e' quindi soluzione classica di $Lu=0$.

Esaminiamo ora il comportamento al bordo di u nel caso *in cui ogni punto di* $\partial\Omega$ *sia non caratteristico* per L , nel senso seguente: per ogni $z_o \in \partial\Omega$ esiste $v \in R^{N+1}, |v| = 1$, tale che : (*i*) $\overline{B(z_o + rv, v)} \bigcap \Omega = \varnothing$; (*ii*) $\langle A(z_o)v, v\rangle > 0$.

Osserviamo esplicitamente che ogni punto di R^{N+1} ha (almeno) una base di intorni verificanti l'ipotesi precedente.

Procedendo esattamente come in [B] , e' facile provare che per ogni punto $z_o \in \partial\Omega$ risulta

$$\lim_{z\to z_o} u(z) = \phi(z_o)$$

Resta pertanto provata la seguente affermazione: esiste una base di intorni della topologia di R^{N+1} per ciascuno dei quali il problema di Dirichlet

$$(4.3) \qquad \begin{cases} Lu = 0 & in \quad \Omega \\ u / \partial\Omega = \phi / \partial\Omega \end{cases}$$

ha una soluzione $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$, per ogni $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$.

Dal principio di massimo si ha poi

(4.4) $$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |\phi|$$

E' facile ora estendere la risolubilita' di (4.3) ad ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Sia Ω un aperto per il quale il problema (4.3) e' risolubile per ogni $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$. Se $\varphi \in C(\partial\Omega)$, sia (ϕ_k)una successione in $C^2(\overline{\Omega})$ tale che

$$\phi_k \to \varphi \quad \textit{uniform.} \quad \textit{su } \partial\Omega$$

Sia poi u_k la soluzione di (4.3) con dato al bordo $\phi_k / \partial\Omega$ .Per (4.4) si ha

$$\sup_{\Omega} | u_k - u_h | = \sup_{\partial\Omega} | \phi_k - \phi_h | \to 0 \quad \textit{per } k,h \to \infty$$

Esiste quindi $u \in C(\overline{\Omega})$ tale che $u / \partial\Omega = \varphi$ e $u_k \to u$ uniform. in Ω. Inoltre

$$\int_{\Omega} u L^{*} v \, dz = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} u_k \, L^{*} v \, dz = 0$$

per ogni $v \in C_0^2(\Omega)$. Cio' prova (Teorema 3.2) che $u \in C^2(\Omega)$ e che $Lu =$ in Ω.

Pertanto: esiste una base di aperti della topologia di R^{N+1} per i quali il problema di Dirichlet (4.3) e' univocamente risolubile in senso classico *per ogni* $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

Utilizzando ora metodi standard della teoria del potenziale, si puo' costruire, per ogni aperto limitato Ω e per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$, una soluzione generalizzata, nel senso di Perron-Wiener, del problema di Dichlet

(4.5) $$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } \Omega \\ u / \partial\Omega = \varphi \end{cases}$$

ponendo

(4.6) $$u = \inf\left\{ v / v \text{ inf.}s.c., \liminf_{\partial\Omega} \geq \varphi, Lv \leq 0 \; in \; s.d. \right\}$$

La funzione (4.6) e' L- armonica in Ω (cioe' e' di classe C^2 e verifica $Lu = 0$in senso classico)

E' facile provare, con la tecnica delle barriere, che u assume il dato φ nei punti non caratteristici di $\partial\Omega$ e, grosso modo, nei punti caratteristici *z=(x,t)* di $\partial\Omega$ nei quali la normale esterna $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N, \nu_{N+1})$ verifica la disuguaglianza

$$\langle x, B\nu \rangle - \nu_{N+1} > 0$$

Risultati piu' precisi sul comportamento di u su $\partial\Omega$ ancora non si conoscono.

Concludiamo con alcune osservazioni.

Osservazione 4.1.- I metodi precedentemente illustrati possono essere utilizzati per studiare il problema di Dirichlet non omogeneo

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u / \partial\Omega = \varphi \end{cases}$$

con f hölderiana in un aperto contenete Ω.

Osservazione 4.2. Ricordiamo che Cimmino, per primo, ha studiato il problema di Dirichlet per le equazioni ellittiche con dati al bordo in $L^2(\Omega)$. Per intraprendere lo studio di un problema analogo nel caso degli operatori qui considerati, un possibile punto di partenza potrebbe essere il seguente. Indichiamo con H_φ^Ω la soluzione generalizzata del problema di Dirichlet (4.5). A causa del principio di massimo, per ogni fissato $z \in \Omega$, l'applicazione

$$\varphi \to H_\varphi^\Omega(z)$$

e' lineare e continua da $C(\partial\Omega)$ ad R. Esiste allora una misura

$$\mu_z^\Omega \in \mathfrak{M}^+(\partial\Omega)$$

tale che

$$H_\varphi^\Omega(z) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\zeta) d\mu_z^\Omega(\zeta)$$

Sia ora $f: \partial\Omega \to R$ tale che : esiste (φ_k) in $C(\partial\Omega)$:

$$\varphi_k \to f \quad \text{in } L^2(\mu_z^\Omega) \qquad \forall z \in \Omega$$

Allora $(H_{\varphi_k}^\Omega)$ converge puntualmente in Ω ad una funzione H_f^Ω di classe $C^2(\Omega)$ e tale che $L(H_f^\Omega) = 0$ in Ω.

Resta ovviamente completamente aperto il problema di vedere se, e in quale modo, la funzione H_f^Ω assume il dato al bordo f.

BIBLIOGRAFIA

[B] **J.M. Bony** : Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 19, 277-304 (1969)

[C] **G. Cimmino** : (a) Ann. Scuola Norm. Pisa(2) 7, 73-96 (1938); (b) Rend. Circolo Mat. Palermo 61, 177-221 (1937); (c) Rend. Sem. Univ. Padova 11, 28-96 (1940); (d) Rend. Acc. Italia (7) 1, 322-329 (1940).

[GT] D. Gilbarg - N.S.Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977

[LP] E. Lanconelli - S. Polidoro : *in preparazione*

[M] C.**Miranda**:*Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Springer- Verlag,1970

[P] B. Pini : (a) Ann. Mat. Pura ed appl. (4) 32, 179-204(1951): (b) Rivista di Mat. Univ. Parma, 1-53-187 (1952)